XXVIII Olimpiada Matemática de Países del Cono Sur
Guayaquil - Ecuador, 2017

Viernes, 18 de agosto de 2017

Segundo día

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo cuyo circuncentro es O. Se eligen puntos X e Y tales que:

- $\angle XAB = \angle YCB = 90°$
- $\angle ABC = \angle BXA = \angle BYC$
- X y C están en semiplanos distintos con relación a AB
- Y y A están en semiplanos distintos con relación a BC

Demostrar que O es el punto medio de XY.

Problema 5. Sean a, b y c enteros positivos. Se definen tres sucesiones tales que:

- $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$
- $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n b_n} \right\rfloor$, $b_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{b_n c_n} \right\rfloor$, $c_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{c_n a_n} \right\rfloor$ para todo $n \geq 1$

a. Demostrar que para cualquier a, b, c, existe un entero positivo N tal que $a_N = b_N = c_N$.

b. Hallar el menor entero positivo N tal que $a_N = b_N = c_N$ para alguna elección de a, b, c tal que $a \geq 2$ y $b + c = 2a - 1$.

Nota: Denotamos $\lfloor x \rfloor$ la *parte entera* del número real x, por ejemplo $\lfloor 2{,}8 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

Problema 6. La sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de enteros positivos se define de la siguiente manera: $a_1 = 1$, y para cada $n \geq 2$, a_n es el menor entero positivo distinto de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ tal que:

$$\sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \ldots + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1}}}} \quad \text{es un entero.}$$

Demostrar que todos los enteros positivos aparecen en la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Idioma: Español

Duración: 4 horas
Cada problema vale 10 puntos