XXVIII Olimpiada Matemática
de Países del Cono Sur
Guayaquil - Ecuador

# XXVIII Olimpiada Matemática de Países del Cono Sur
# Guayaquil - Ecuador, 2017

---

*Sexta-feira, 18 de agosto de 2017*

## Segundo dia

**Problema 4.** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo cujo circuncentro é $O$. Sejam pontos $X$ e $Y$ tais que:

- $\angle XAB = \angle YCB = 90°$
- $\angle ABC = \angle BXA = \angle BYC$
- $X$ y $C$ estão em semiplanos distintos com relação a $AB$
- $Y$ y $A$ estão en semiplanos distintos con relação a $BC$

Demostrar que $O$ é o ponto médio de $XY$.

**Problema 5.** Sejam $a$, $b$ e $c$ inteiros positivos. Definem-se três sequências tais que:

- $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$
- $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n b_n} \right\rfloor$, $b_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{b_n c_n} \right\rfloor$, $c_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{c_n a_n} \right\rfloor$ para todo $n \geq 1$

a. Demostrar que, para quaisquer $a$, $b$, $c$, existe um inteiro positivo $N$ tal que $a_N = b_N = c_N$.

b. Achar o menor inteiro positivo $N$ tal que $a_N = b_N = c_N$ para alguma escolha de $a$, $b$, $c$ tais que $a \geq 2$ e $b + c = 2a - 1$.

**Nota:** Denotamos por $\lfloor x \rfloor$ a *parte inteira* do número real $x$, por exemplo $\lfloor 2{,}8 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

**Problema 6.** A sequência infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de inteiros positivos se define da seguinte maneira: $a_1 = 1$ e, para cada $n \geq 2$, $a_n$ é o menor inteiro positivo distinto de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ tal que:

$$\sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \ldots + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_1}}}} \quad \text{é um inteiro.}$$

Demostrar que todos os inteiros positivos aparecem na sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

*Idioma: Português*

*Duração: 4 horas*
*Cada problema vale 10 pontos*